Lect.Fiz.Dr. Codruta Badea
Universitatea Tehnica din Cluj Napoca
badeacodruta@phys.utcluj.ro

Oscilații și unde elastice. Acustica.

Notiuni teoretice:

Forta elastică *(de revenire la poziția initială) ce actionează asupra unui resort alungit este:*

$$F = -kx = -k\Delta l = -E\frac{S}{l}\Delta l$$

unde k este constanta elastică, $x = \Delta l$ *reprezintă alungirea resortului, E constanta lui Young, S secțiunea firului iar l este lungimea initială.*

Ecuația unui oscilator armonic:

$$x(t) = A_0 sin(\omega_0 t + \varphi)$$

unde x(t) este elongația resortului, $A_o = x_{max}$ *reprezintă amplitudinea miscării sau elongatia maximă,* $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$ *este pulsatia proprie a sistemului oscilant, iar* φ *este faza initiala a mișcării. Viteza și acceleratia oscilatorului se calculeaza prin derivarea elongatiei și a vitezei în raport cu timpul. T este perioada sistemului, iar* $\vartheta = \frac{1}{T}$ *este frecventa sistemului.*

Ecuația unui oscilator amortizat:

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} sin(\omega t + \varphi)$$

unde $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ *este amplitudinea mișcării,* $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ *reprezinta pulsatia oscilatorului care este mai mica decât pulsatia proprie,* $\delta = \frac{r}{2m}$ *este coeficientul de amortizare*

Energia unui oscilator:

$$E = \frac{kA^2}{2}$$

1. De o sârmă de cupru cu lungimea de 160 cm și diametrul de 1 mm este atârnată o greutate de 10kg. Știind că alungirea sârmei este de 0,64 mm, să se afle:

a). care este solicitarea (efortul unitar), alungirea specifică (relativă), constanta elastică a sârmei și flexibilitatea sa;

b). care este modulul de elasticitate (Young) al cuprului;

c). cât devine distanța interatomică, dacă în stare nesolicitată aceasta este $R_0 = 2{,}56$ Å.

Raspuns:

a) Efortul unitar sau solicitarea sârmei este definite din legea lui Hooke:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{\pi r^2} = \frac{10 \cdot 9{,}8}{3.14 \cdot (10^{-3})^2} = 3.12 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$$

Alungirea relativă: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.64 \cdot 10^{-3}}{1.6} = 4 \cdot 10^{-4} = 0.04\%$

Din definiția forței elastic se deduce constanta elastic a firului:

$$F = E\frac{S}{l}\Delta l = k \cdot \Delta l \ \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{10 \cdot 9.8}{0.64 \cdot 10^{-3}} = 1.53 \cdot 10^5 \frac{N}{m}$$

Flexibilitatea unui material este definită ca inversul constantei elastice a materialului:

$$\frac{\Delta l}{F} = \frac{1}{k} = \frac{1}{1.53 \cdot 10^5} = 6.53 \cdot 10^{-4} \frac{m}{N}$$

b) Modulul lui Young este:

Lect.Fiz.Dr. Codruta Badea
Universitatea Tehnica din Cluj Napoca
badeacodruta@phys.utcluj.ro

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{3.12 \cdot 10^{7}}{4 \cdot 10^{-4}} = 7.8 \cdot 10^{10}\,\frac{N}{m^2}$$

c) Distanța interatomică pe direcția de întindere este:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = 4 \cdot 10^{-4} = 0.04\%$$

$$\Delta R = R_0 \varepsilon = 2.56 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 1.024 \cdot 10^{-3}\text{Å}$$

$$R = R_0 + \Delta R = 2.56 + 1.024 \cdot 10^{-3} = 2.561024\text{Å}$$

2. Accelerația unui oscilator armonic cu masa 200g variază în timp real după ecuația $a = -20 sin10(t+0.1)\frac{m}{s^2}$. Să se afle:

a).elementele mișcării oscilatorii (frecvența unghiulară-ω, perioadaT, frecvența-ϑ, faza inițială-φ_0)

b). ecuația vitezei și ecuația elongației;

c). expresia forței elastice și constanta elastică a sistemului;

Răspuns:

a) $\omega = 10\frac{rad}{s}$ $\quad \vartheta = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2 \cdot 3.14} = 1.59\,s^{-1}$ $\quad T = \frac{1}{\vartheta} = 0.628\,s$ $\quad \varphi_0 = \omega \cdot t_0 = 10 \cdot 0.1 = 1\,rad$

b) $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt \Rightarrow v = -20\int_0^t \sin 10(t+0.1)dt = 2\cos 10(t+0.1)\ \frac{m}{s}$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow x = 2\int_0^t cos10(t+0.1)dt = 0.2sin10(t+0.1)\ m$$

c) $F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a = 0.2 \cdot \left(-20sin10(t+0.1)\right) = 4sin10(t+0.1)\ N$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega^2 = 0.2 \cdot 10^2 = 20\ \frac{N}{m}$$

3. Care este perioada de oscilație a unui automobil ale cărui arcuri se comprimă cu 8 cm când cinci călători cu masa de 80 kg fiecare se urcă în acesta. Se cunoaște masa automobilului gol de 1260 kg și masa unei roți de 15kg. Care este coeficientul de amortizare și perioada oscilațiilor, dacă amortizoarele au coeficientul de rezistență r=7,59.10^{3}N/m.s.

Raspuns:

Deoarece cei 5 calatori vor produce o deplasare suplimentara a arcurilor, se va calcula constanta elastica a acestora astfel:

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{m_c \cdot g}{\Delta l} = \frac{5 \cdot 80 \cdot 9.8}{8 \cdot 10^{-2}} = 4.9 \cdot 10^{4}\frac{N}{m}$$

Masa întregului sistem oscilant este formată din masa automobilului , la care se adaugă cei cinci calatori si se scade masa rotilor.

$$m = m_a + 5 \cdot m_c - 4 \cdot m_r = 1260 + 5 \cdot 80 - 4 \cdot 15 = 1600\ kg$$

Perioada proprie, in lipsa oricarei forte de frecare este:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1600}{4.9 \cdot 10^4}} = 2\pi\frac{40}{7 \cdot 10^2}\sqrt{10} = 1.135\ s$$

Pentru a determina perioada reala, in prezenta frecarilor trebuie sa determinam coeficientul de amortizare. Pentru asta, vom scrie ecuația dinamică a miscării (este o miscare oscilatorie amortizată pe verticală, pe axa y):

$$ma = -ky - rv$$

Sau in format diferențial, împărțind cu m: $\ddot{y} + \frac{r}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$

Unde stim că $\frac{r}{m} = 2\delta$ și că frecvența proprie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$\delta = \frac{r}{2m} = \frac{7.59 \cdot 10^3}{2 \cdot 1600} = 2.73\ s^{-1}$$

Perioada reală a sistemului, în prezența amortizării este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{30.625 - 2.37}} = 1.257\ s$$

4. Pe plăcile de deflexie ale unui oscilograf catodic cu sensibilitatea de 2cm/V pe ambele axe 0x și Oy se aplică întâi separat și apoi simultan tensiunile alternative:

$$U_x = 2\cos 100t \ (V)$$
$$U_y = 4sin^2 50t \ (V)$$

Să se precizeze:

a). ecuațiile de mișcare ale spotului când tensiunile sunt aplicate separat;

b). ecuația traiectoriei spotului când tensiunile sunt aplicate simultan;

c). ecuația orară (naturală) de mișcare a spotului pe traiectorie;

d). expresia vitezei de mișcare a spotului.

Raspuns:

a) Valoarea deplasărilor maxime a spotului sunt direct proporționale cu sensibilitatea osciloscopului și cu amplitudinea tensiunii aplicate. Astfel:

$$x_{max} = 2V \cdot 2\frac{cm}{V} = 4cm$$
$$y_{max} = 4V \cdot 2\frac{cm}{V} = 8cm$$

Ecuațiile de mișcare a spotului se vor scrie:

$$x = 4cos100t$$
$$y = 8sin^2 50t = 4(1 - cos100t)$$

b) Pentru a scrie ecuația traiectoriei, trebuie gasită o relație între expresiile ecuațiilor de miscare a spotului.

$$\begin{cases} x/4 = cos100t \\ y = 4(1 - cos100t) \end{cases} \Rightarrow y = 4\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 4 - x$$

Spotul se va mișca pe o traiectorie dreapta în momentul când sunt aplicate simultan ambele tensiuni.

c) Ecuația naturală este reprezentată de compunerea ecuațiilor pe cele două direcții, la nivel infinit mic.

$$dx = -400sin100tdt$$
$$dy = 400sin100tdt$$
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{2 \cdot 400^2 \cdot sin^2 100tdt} = 400\sqrt{2}sin100tdt$$
$$\int_0^s ds = \int_0^t 400\sqrt{2}sin100tdt \Rightarrow s = -4\sqrt{2}sin100t|_0^t = 4\sqrt{2}(1 - cos100t) = 8\sqrt{2}sin^2 50t \ (cm)$$

d) $v = \frac{ds}{dt} = 400\sqrt{2}sin100t \left(\frac{cm}{s}\right) = 4\sqrt{2}sin100t \left(\frac{m}{s}\right)$

5. Un fir elastic de cauciuc se întinde cu 20cm când atârnăm de el un corp cu masa m=10 g. Dacă scoatem corpul din poziția de echilibru cu 10 cm și îl lăsăm liber, acesta oscilează amortizat, astfel că amplitudinea scade la un sfert după 4 secunde. Știind că amplitudinea scade exponential cu timpul după legea $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$, se cere:

a). constanta elastică a firului și flexibilitatea sa;

b). de câte ori a scăzut energia potențială maximă a oscilatorului;

c). ce valoare are coeficientul de amortizare δ;

d). cu cât este mai mare perioada oscilațiilor amortizate decât a oscilațiilor proprii.

Răspuns:

a) $k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{0.01 \cdot 9.8}{0.2} = 0.49\frac{N}{m}$

Flexibiliatea este:$Flex = \frac{\Delta l}{F} = \frac{1}{k} = \frac{1}{0.49} = 2.04\frac{m}{N}$

b) $\frac{E(4)}{E(0)} = \frac{\frac{k}{2}A(4)^2}{\frac{k}{2}A(0)^2} = \frac{(\frac{A_0}{4})^2}{A_0^2} = \frac{1}{16}$

$E(4) = \frac{1}{16}E(0)$ energia scade de 16 ori fata de cea inițială

c) $A(t) = A_0 e^{-\delta t} \Rightarrow \frac{A}{A_0} = e^{-\delta t}$

$$\frac{1}{4} = e^{-4\delta} \Rightarrow -ln4 = -4\delta\tau \ \Rightarrow \delta = \frac{ln4}{4} = 0.3465 \ s^{-1}$$

d) Frecvența unghiulară a oscilațiilor amortizate este:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

unde $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{mg}{\Delta l \cdot m} = \frac{g}{\Delta l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta l} - \delta^2}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{9.8}{0.2} - (0.3465)^2}} = 0.8987 \ s$$

Lect.Fiz.Dr. Codruta Badea
Universitatea Tehnica din Cluj Napoca
badeacodruta@phys.utcluj.ro

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{9.8}{0.2}}} = \frac{2\pi}{7} = 0.8976\ s$$

$$\Delta T = T - T_0 = 0.0011\ s$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{0.0011}{0.8987} = 0.001226 = 1.223 \cdot 10^{-3} = 0.1226\%$$